

一种稳定性不受媒质损耗影响的 CN-RK时域间断伽辽金方法

向 汝, 马西奎, 马 亮, 迟明珺, 王嘉玮*

(西安交通大学电气工程学院, 陕西西安 710049)

摘 要: 采用显式龙格-库塔(Runge-Kutta, RK)时间积分格式的时域间断伽辽金(Discontinuous Galerkin Time-Domain, DGTD)方法求解涉及有耗媒质的电磁问题时,时间步长会受到电导率或导磁率的严格限制. 虽然已经有研究通过数值试验验证了有耗媒质对稳定性的影响,但缺乏严格的理论依据. 因此,本文基于理论推导建立了有耗媒质中显式RK-DGTD方法的稳定性条件,得到时间步长上限的估计值,并对其准确性进行了数值验证. 此外,为了提高计算效率,本文提出了一种适用于DGTD方法的隐式-显式时间离散格式,采用隐式Crank-Nicolson(CN)格式对损耗项进行离散,而对其余项采用显式RK格式,从理论上证明了该方法的时间稳定性不受媒质损耗的影响,并通过数值算例验证了其可靠性与效率.

关键词: DGTD方法;有耗媒质;稳定性;隐式-显式

基金项目: 国家自然科学基金(No.52207014)

中图分类号: TM15;TN011

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2025)08-2649-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20241004

A CN-RK Discontinuous Galerkin Time-Domain Method Without the Stability Restriction Due to Material Loss

XIANG Ru, MA Xi-kui, MA Liang, CHI Ming-jun, WANG Jia-wei*

(School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: When discontinuous Galerkin time-domain (DGTD) methods with explicit runge-kutta (RK) schemes are applied to the analysis of electromagnetic (EM) problems involving lossy media, the time-step size is strictly limited by electric and magnetic conductivity. Although the influence of lossy media on stability has been verified by numerical experiments, it lacks strict theoretical support. Therefore, the stability condition of the explicit RK-DGTD methods in lossy media is established based on theoretical derivation. The upper limit of time-step size is estimated, and numerical results demonstrate its accuracy. In addition, to improve computational efficiency, an implicit-explicit time integration scheme is proposed for DGTD methods. The lossy terms are discretized using an implicit crank-nicolson (CN) scheme, while the remaining terms are discretized using an explicit RK scheme. The time stability of the proposed method is theoretically proven to be unaffected by material loss, and numerical experiments validate its reliability and efficiency.

Key words: DGTD methods; lossy medium; stability; implicit-explicit

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.52207014)

1 引言

时域间断伽辽金(Discontinuous Galerkin Time-Domain, DGTD)方法由于其灵活的时空离散方式在计算电磁学中得到广泛的关注^[1-5]. 与经典时域有限元方法^[6,7]相比, DGTD方法通过引入数值通量对网格单元

边界的切向连续性条件进行松弛,实现了显式的时间推进格式,避免了全局矩阵方程的求解,因此内存消耗更少,计算效率更高. 目前,具有高阶精度的龙格-库塔(Runge-Kutta, RK)格式是DGTD方法中最常用的显式时间积分格式之一. 然而,当处理涉及有耗媒质的电磁

问题时^[8,9],显式 RK-DGTD 方法的稳定性会随着电导率的增加而恶化^[10].虽然已有研究从数值试验的角度对这一现象进行了验证,但缺乏严格的理论依据.因此,本文将基于理论推导建立有耗媒质中 RK-DGTD 方法的稳定性条件,揭示电导率、导磁率对显式 DGTD 方法时间稳定性的影响,得到时间步长上限的估计值,并通过数值实验验证结论的准确性.

此外,针对 DGTD 方法的时间稳定性瓶颈,目前一些无条件稳定的时间积分方法已被应用于 DGTD 方法中,例如 Crank-Nicolson (CN)^[11]法、矩阵指数法^[12]等.这类方法虽然可以突破有耗媒质对时间步长的限制,但通常涉及大型线性方程组的求解,破坏了 DGTD 方法显式时间推进的优势,计算负担较重.文献[13]基于域分解的思想求解多尺度问题,对粗细网格区域分别采用显式 RK 和隐式 RK 格式,若将该方法应用于有损问题中,仅对有损区域采用无条件稳定的隐式 RK 格式,其余无损区域仍采用显式 RK 格式,虽然一定程度上可以提升计算效率,但对于有耗媒质分布较广的复杂问题计算量依然难以承受.

因此,有研究提出了隐式-显式 (IMplicit-EXplicit, IMEX) RK 方法^[14],只对损耗项采用隐式 RK 格式,通过隐式处理线性刚性项和显式处理非线性非刚性项,放宽了系统刚性对时间步长的限制,同时可以保持 DGTD 方法的显式推进形式,避免求解大型线性方程组.但是隐式 RK 格式涉及多个中间阶段,计算效率不高.因此,为了在移除媒质损耗对时间步长影响的同时,进一步提高计算效率,本文提出了一种新的具有显式推进形式的 CN-RK 时间积分方法.该方法采用隐式 CN 格式离散容易引起数值不稳定的损耗项,其余项采用显式 RK 格式.相比于现有的 IMEX RK 方法, CN-RK 方法不仅继承了显式推进和稳定性不受媒质损耗影响的优点,而且隐式 CN 格式的引入还避免了隐式 RK 格式中间阶段的繁琐计算,实现简单,计算效率更高,内存消耗更少,非常适合有耗媒质的建模.此外, IMEX RK 方法的稳定性难以从理论上分析,目前仅通过数值试验进行了验证,而 CN-RK 方法可以从理论上证明是稳定的,其时间步长上限不受电导率或导磁率的影响.

2 有耗媒质中的 RK-DGTD 方法

2.1 DGTD 基本原理

为方便起见,考虑非均匀、有耗媒质区域的齐次 Maxwell 方程组:

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma_h \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

式中: \mathbf{E} 表示电场强度; \mathbf{H} 表示磁场强度; σ_h 表示导磁

率,代表磁损耗; σ_e 表示电导率,代表电损耗; μ 表示磁导率; ε 表示介电常数.对式(1)和式(2)在第 k ($1 \leq k \leq K$, 其中 K 为离散单元总数)个网格单元内进行伽辽金空间测试^[15]后可得

$$\iint_{\tau_k} \psi_i^k \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma_h \mathbf{H} \right) dV - \iint_{\tau_k} \mathbf{E} \times \nabla \psi_i^k dV \quad (3)$$

$$= - \oint_{\partial \tau_k} \psi_i^k (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) dS$$

$$\iint_{\tau_k} \psi_i^k \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E} \right) dV + \iint_{\tau_k} \mathbf{H} \times \nabla \psi_i^k dV \quad (4)$$

$$= \oint_{\partial \tau_k} \psi_i^k (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) dS$$

式中: ψ_i^k 表示节点 Legendre 基函数 ($i=1, 2, \dots, N_p$, 其中 N_p 为基函数总项数); τ_k 表示单元 k 的积分区域; \mathbf{n} 表示单元 k 表面的法向单位矢量.式(3)和式(4)的右端面积分项采用迎风通量处理^[16],交界面上的电磁场切向分量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{k*} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}^k + \frac{Y^{k+}}{Y^k + Y^{k+}} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{k+} - \mathbf{E}^k) \\ &\quad + \frac{1}{Y^k + Y^{k+}} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{k+} - \mathbf{H}^k) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{k*} &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}^k + \frac{Z^{k+}}{Z^k + Z^{k+}} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{k+} - \mathbf{H}^k) \\ &\quad - \frac{1}{Z^k + Z^{k+}} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{k+} - \mathbf{E}^k) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: \mathbf{E}^{k*} 和 \mathbf{H}^{k*} 表示单元 k 与相邻单元 $k+$ 的交界面上的电场强度和磁场强度; Z 表示波阻抗; Y 表示波导纳.将式(5)和式(6)分别代入到式(3)和式(4)中可得随时时间变化的 Maxwell 旋度方程组的半离散形式为

$$\frac{d\mathbf{H}^k}{dt} = -\frac{\sigma_h^k}{\mu^k} \mathbf{H}^k + \frac{1}{\mu^k} \left(-D_e \mathbf{E}^k + \mathbf{M}^{-1} F_H^k(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \right) \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{E}^k}{dt} = -\frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} \mathbf{E}^k + \frac{1}{\varepsilon^k} \left(D_h \mathbf{H}^k + \mathbf{M}^{-1} F_E^k(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \right)$$

式中: \mathbf{M} 表示质量矩阵; D_e 和 D_h 表示旋度的离散算子; F_H^k 和 F_E^k 表示迎风通量的离散算子.

2.2 RK-DGTD 方法在有耗媒质中的稳定性分析

当采用显式 RK 格式对半离散系统式(7)进行时间离散时,若存在非零电导率或导磁率,系统的时间稳定性会降低,为了保持稳定,必须选取极小的时间步长,导致严重的计算负担.目前这一现象缺乏理论依据,本节将从理论层面揭示有耗媒质中时间步长与电导率或导磁率之间的关系,得到 RK-DGTD 方法的时间步长上限的估计值.

将常微分方程组式(7)写成矩阵形式:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{x} = [\mathbf{E}^1 \mathbf{H}^1 \ \mathbf{E}^2 \mathbf{H}^2 \ \dots \ \mathbf{E}^K \mathbf{H}^K]^\top$; $\mathbf{A} = \mathbf{T} + \mathbf{S}$; \mathbf{T} 是与损耗项无关的矩阵; \mathbf{S} 是与损耗项相关的对角矩阵, 可表示为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{S}^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{S}^K \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, \mathbf{S}^k 为

$$\mathbf{S}^k = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\sigma_h^k}{\mu^k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma_h^k}{\mu^k} \end{bmatrix} \quad (10)$$

在电损耗和磁损耗都存在的情况下来讨论, 且 $\sigma_e^1/\varepsilon^1 = \sigma_h^1/\mu^1 = \dots = \sigma_e^K/\varepsilon^K = \sigma_h^K/\mu^K = \alpha$, 则矩阵 \mathbf{S} 对角线上的元素都相等, 可得

$$\lambda(\mathbf{A}) = \lambda(\mathbf{T}) - \alpha \quad (11)$$

式中: λ 表示矩阵的特征值. 如果时间积分格式稳定, 则 $\lambda(\mathbf{A})\Delta t$ 必须位于绝对稳定域内, 其中 Δt 为时间步长. 由式(11)可知, 电导率或导磁率的存在会使 $\lambda(\mathbf{A})$ 的实部减小, 若 Δt 不变, 可能导致部分特征值 $\lambda(\mathbf{A})\Delta t$ 移出绝对稳定域, 引起数值不稳定. 因此, 分析电导率或导磁率对稳定性的影响时, 可以只对 $\lambda(\mathbf{A})\Delta t$ 的实部进行分析, $\text{Real}(\lambda(\mathbf{A})\Delta t)$ 必须满足

$$\text{Real}_{\min} \leq \text{Real}(\lambda(\mathbf{A})\Delta t) \leq \text{Real}_{\max} \quad (12)$$

式中: Real_{\min} 和 Real_{\max} 表示绝对稳定域的实部最小值和最大值. 将式(11)代入式(12)可得

$$\Delta t \leq \frac{\text{Real}_{\min}}{\min\{\text{Real}(\lambda(\mathbf{T}))\} - \alpha} \quad (13)$$

由式(13)可知, 有耗媒质中时间步长会受到电导率或导磁率的严格限制, 其上限会随着电导率或导磁率的增加而减小. 当 $\sigma_e/\varepsilon \neq \sigma_h/\mu$ 时, 可以近似 $\alpha = \max_{1 \leq k \leq K} (\sigma_e^k/\varepsilon^k, \sigma_h^k/\mu^k)$, 根据式(13)求出时间步长上限的估计值.

3 一种稳定的 CN-RK 格式的 DGTD 方法

3.1 时间步进格式

为了避免时间步长受到有耗媒质的影响, 本文提出一种混合隐式-显式时间积分格式: 采用隐式 CN 格式

来处理式(7)中损耗项引起的刚性, 而其余项采用计算消耗较低的显式 RK 格式积分. 对电场进行分裂, 令 $\mathbf{E}^k = \mathbf{E}^{k,1} + \mathbf{E}^{k,2}$, 则式(7)可变形为

$$\frac{d\mathbf{E}^{k,1}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^k} (D_h \mathbf{H}^k + \mathbf{M}^{-1} F_E^k(\mathbf{E}, \mathbf{H})) \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{E}^{k,2}}{dt} = -\frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} \mathbf{E}^k \quad (15)$$

首先对式(14)采用 s 级显式 RK 格式离散:

$$K_i^e = N_e \left(\mathbf{E}_n^k + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^e, \mathbf{H}_n^k + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^h \right) \quad (16)$$

$$K_i^h = N_h \left(\mathbf{E}_n^k + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^e, \mathbf{H}_n^k + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^h \right) \quad (17)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^{k,1} = \mathbf{E}_n^{k,1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i K_i^e, \quad 1 \leq i \leq s \quad (18)$$

式中: K_i^e 和 K_i^h 表示中间阶段; a_{ij} 和 b_i 表示显式 RK 格式的相关系数; s 表示显式 RK 格式的级数; n 表示时刻标记; N_e 和 N_h 分别为

$$N_e(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{\varepsilon^k} (D_h \mathbf{H}^k + \mathbf{M}^{-1} F_E^k(\mathbf{E}, \mathbf{H})) \quad (19)$$

$$N_h(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{\mu^k} (-D_e \mathbf{E}^k + \mathbf{M}^{-1} F_H^k(\mathbf{E}, \mathbf{H}))$$

其次, 对式(15)采用隐式 CN 格式离散, 用中心差分近似方程左端的时间偏导数, 右端项取前一时刻和新时刻的平均值, 可得

$$\mathbf{E}_{n+1}^{k,2} = \mathbf{E}_n^{k,2} - \Delta t \frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} \left(\frac{\mathbf{E}_{n+1}^{k,2} + \mathbf{E}_n^{k,2}}{2} \right) \quad (20)$$

将式(18)和式(20)相加可得

$$\mathbf{E}_{n+1}^k = \mathbf{E}_n^k - \Delta t \frac{\sigma_e^k}{\varepsilon^k} \left(\frac{\mathbf{E}_{n+1}^k + \mathbf{E}_n^k}{2} \right) + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i K_i^e \quad (21)$$

从而得到电场的时域迭代公式为

$$\mathbf{E}_{n+1}^k = \frac{1}{1 + \Delta t \sigma_e^k / 2\varepsilon^k} \left(\mathbf{E}_n^k - \frac{\sigma_e^k}{2\varepsilon^k} \Delta t \mathbf{E}_n^k + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i K_i^e \right) \quad (22)$$

同理可得磁场的时域迭代公式为

$$\mathbf{H}_{n+1}^k = \frac{1}{1 + \Delta t \sigma_h^k / 2\mu^k} \left(\mathbf{H}_n^k - \frac{\sigma_h^k}{2\mu^k} \Delta t \mathbf{H}_n^k + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i K_i^h \right) \quad (23)$$

由于 CN-RK 格式仅对跟电磁场线性相关的损耗项隐式积分, 待求解的线性方程组系数矩阵是类似质量矩阵 \mathbf{M} 的块对角结构, 对其求逆的额外内存和计算消耗几乎可忽略不计, 因此求解过程依然保持显式推进形式, 避免了传统隐式方法需对全局系数矩阵求逆导致的沉重计算负担.

3.2 稳定性分析

将 CN-RK 格式的 DGTD 方法的电磁场时域迭代公式(22)和式(23)写成矩阵形式:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{x}_n \quad (24)$$

式中： \mathbf{G} 表示时间步进算子. 在无损情况下,若 Δt 满足 CFL 稳定性条件^[13],即 $\Delta t \leq \Delta t_{\text{CFL}}$,则

$$|\lambda_i(\mathbf{G})| = |a_i + jb_i| \leq 1 \quad (25)$$

其中, $a_i^2 + b_i^2 \leq 1$,且 $|a_i| \leq 1$. 在有损情况下,时间步进算子 \mathbf{G}' 为

$$\mathbf{G}' = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S} \right)^{-1} \left[\mathbf{G} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S} \right] \quad (26)$$

式中： \mathbf{I} 表示单位矩阵. 同样,在电损耗和磁损耗都存在的情况下来分析,且 $\sigma_e/\epsilon = \sigma_h/\mu = \alpha$,可得

$$\lambda_i(\mathbf{G}') = \frac{\lambda_i(\mathbf{G}) - \alpha\Delta t/2}{1 + \alpha\Delta t/2} = \frac{a_i + jb_i - \alpha\Delta t/2}{1 + \alpha\Delta t/2} \quad (27)$$

若有损情况下的 Δt 依然满足无损情况下的 CFL 稳定性条件,则式(27)中的 $|\lambda_i(\mathbf{G})|$ 满足 $|\lambda_i(\mathbf{G})| \leq 1$,可得矩阵 \mathbf{G}' 的特征值模值:

$$\begin{aligned} |\lambda_i(\mathbf{G}')| &= \frac{\sqrt{(a_i - \alpha\Delta t/2)^2 + b_i^2}}{1 + \alpha\Delta t/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{1 - \Delta t a_i \alpha + (\alpha\Delta t/2)^2}}{1 + \alpha\Delta t/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{(1 + \alpha\Delta t/2)^2}}{1 + \alpha\Delta t/2} = 1 \end{aligned} \quad (28)$$

因此,若 $\Delta t \leq \Delta t_{\text{CFL}}$,不论电导率或导磁率多大,对损耗项采用 CN 方法隐式处理后,矩阵 \mathbf{G}' 的特征值模值始终都小于等于 1,即在求解过程中始终保持稳定. 由于有耗媒质填充整个计算域时,CN-RK 格式的稳定性不会降低,那么当计算域仅局部存在有耗媒质或 $\sigma_e/\epsilon \neq \sigma_h/\mu$ 时,CN-RK 格式的稳定性依然不会因为媒质损耗下降.

4 数值算例

4.1 稳定性验证

首先通过一个二维有损谐振腔实例验证显式 RK 格式在有耗媒质中的稳定性条件,假定计算域为 $[-1, 1] \times [-1, 1] \text{ m}^2$,离散单元总数 $K=166$,基函数阶数 $N=3$. 考虑均匀有损谐振腔情况,相对介电常数为 1,且 $\sigma_e/\epsilon = \sigma_h/\mu$. 在不同电导率下采用经典显式二级二阶 RK(RK22)格式、三级三阶 RK(RK33)格式和四级四阶 RK(RK44)格式进行仿真,通过多次试验找到保持稳定的最大时间步长,与第 2.2 节中推导出的有耗媒质中显式 RK 格式的时间步长上限进行比较,如表 1 所示. 时间步长上限的试验值与解析值完全一致,且随着电导率或导磁率的增加,时间步长的上限逐渐降低,受到电导率或导磁率的严格限制. 以 RK22 格式为例,图 1 展示了电导率等于 1 S/m 时特征值 $\lambda(\mathbf{A})\Delta t$ 的分布,当时间步长取上限时,所有特征值位于绝对稳定域内,当时间

步长稍大时,部分特征值位于绝对稳定域外,导致数值不稳定性.

表 1 不同电导率下的时间步长上限($\sigma_e/\epsilon = \sigma_h/\mu$) 单位:s

| $\sigma_e/(S/m)$ | Δt_{max} | RK22 | RK33 | RK44 |
|------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | Δt_{CFL} | 3.993×10^{-11} | 5.257×10^{-11} | 5.856×10^{-11} |
| | 解析值 | 1.248×10^{-11} | 1.568×10^{-11} | 1.738×10^{-11} |
| 1 | 试验值 | 1.248×10^{-11} | 1.568×10^{-11} | 1.738×10^{-11} |
| | 比值 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 10^3 | 解析值 | 1.770×10^{-14} | 2.223×10^{-14} | 2.465×10^{-14} |
| | 试验值 | 1.770×10^{-14} | 2.223×10^{-14} | 2.465×10^{-14} |
| 10^6 | 解析值 | 1.770×10^{-17} | 2.224×10^{-17} | 2.466×10^{-17} |
| | 试验值 | 1.770×10^{-17} | 2.224×10^{-17} | 2.466×10^{-17} |
| | 比值 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

注:比值=试验值/解析值,为无量纲比值.

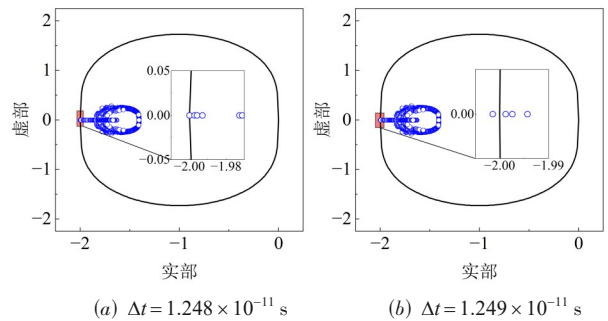


图 1 RK22 的绝对稳定域及其 $\lambda(\mathbf{A})\Delta t$ 分布

为了进一步验证推导的稳定性条件的普遍适用性,考虑只有电导率存在的情况,即 $\sigma_h = 0 \text{ } \Omega/m$,则 α 可近似为 σ_e/ϵ ,根据式(13)求出时间步长上限的估计值,并将其与试验值进行比较,如表 2 所示. 可知时间步长上限的试验值与估计值依然十分吻合,试验值与估计值的比值等于或接近于 1,从而验证了所推导的有耗媒质中显式 RK-DGTD 方法的稳定性条件的有效性.

表 2 不同电导率下的时间步长上限($\sigma_h = 0 \text{ } \Omega/m$) 单位:s

| $\sigma_e/(S/m)$ | Δt_{max} | RK22 | RK33 | RK44 |
|------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | Δt_{CFL} | 3.993×10^{-11} | 5.257×10^{-11} | 5.856×10^{-11} |
| | 估计值 | 1.248×10^{-11} | 1.568×10^{-11} | 1.738×10^{-11} |
| 1 | 试验值 | 1.218×10^{-11} | 1.536×10^{-11} | 1.697×10^{-11} |
| | 比值 | 0.976 | 0.976 | 0.976 |
| 10^3 | 估计值 | 1.770×10^{-14} | 2.223×10^{-14} | 2.465×10^{-14} |
| | 试验值 | 1.770×10^{-14} | 2.223×10^{-14} | 2.465×10^{-14} |
| 10^6 | 估计值 | 1.770×10^{-17} | 2.224×10^{-17} | 2.466×10^{-17} |
| | 试验值 | 1.770×10^{-17} | 2.224×10^{-17} | 2.466×10^{-17} |
| | 比值 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

注:比值=试验值/估计值,为无量纲比值.

显式RK格式的时间步长上限会受到电导率或导磁率的严格限制,而采用CN-RK格式的DGTD方法时,如图2所示,随着电导率的增加,时间步长几乎保持不变,始终不低于无损情况下显式RK格式的时间步长上限 Δt_{CFL} ,与第3.2节中的稳定性分析结果一致.通常为了保持稳定,可选取无损情况下的时间步长上限进行仿真.

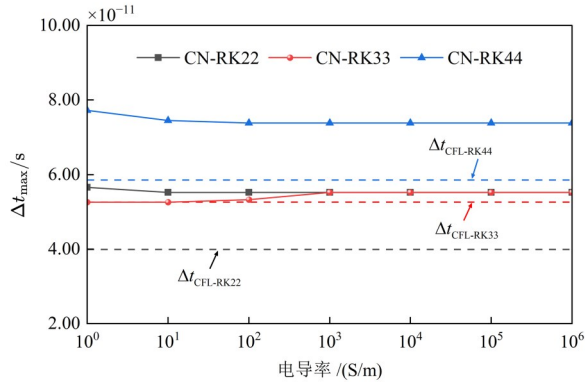


图2 CN-RK格式的 Δt_{max} 随电导率的变化

以 $\sigma_e=10^6$ S/m为例,图3展示了特征值 $\lambda(\mathbf{G}')$ 的分布,当 $\Delta t=5.523 \times 10^{-11}$ s时,CN-RK22格式的特征值均位于单位圆内或圆上,而采用RK22格式时,即使 Δt 为CN-RK22格式的 $1/10^6$,依然有部分特征值位于单位圆外,从而引起数值不稳定.因此在求解有损问题时,相比于显式RK格式,CN-RK格式的稳定性更好,可以选取更大的时间步长,这种优势在高电导率下更显著.

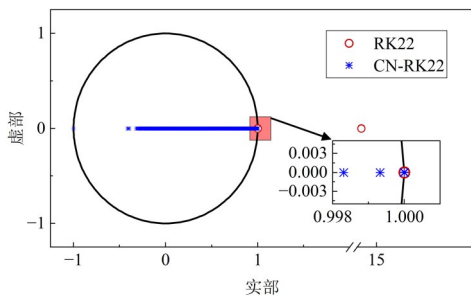


图3 矩阵 \mathbf{G}' 的特征值分布

4.2 探地雷达模型

为了验证所提出的CN-RK方法在有损问题中的准确性和有效性,模拟有耗媒质环境下的探地雷达场景^[17],图4为探地雷达模型示意图,模型计算域为 $[-4, 4] \times [-4, 4]$ m².一个半径为0.5 m的圆形金属导体深埋于土壤中,圆心坐标为(2, -2) m,材料参数为 $\epsilon_r=6$ 、 $\mu_r=1$ 和 $\sigma_e=5 \times 10^4$ S/m.金属旁有一个长为2 m、宽为0.5 m的长方形空气气隙,中心坐标为(-1, -2) m.土壤的材料参数为 $\epsilon_r=4$ 、 $\mu_r=1$ 和 $\sigma_e=0.2 \times 10^{-3}$ S/m.采用一阶吸收

边界条件截断计算域,总的离散四面体个数为1 046个,基函数阶数 $N=3$.探地雷达发射天线 T_x 和接收天线 R_x 分别位于 $(-0.3, 0, 2.01)$ m和 $(0.3, 0, 2.01)$ m处,将Blackmann-Harris脉冲作为激励源脉冲,其函数表达式为

$$I_z(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=1}^3 a_n n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_s}\right), & 0 < t < T_s \\ 0, & t \geq T_s \end{cases} \quad (29)$$

其中, $f_c=100$ MHz, $T_s=1.55/f_c$.系数 a_n 的取值参阅文献[18].

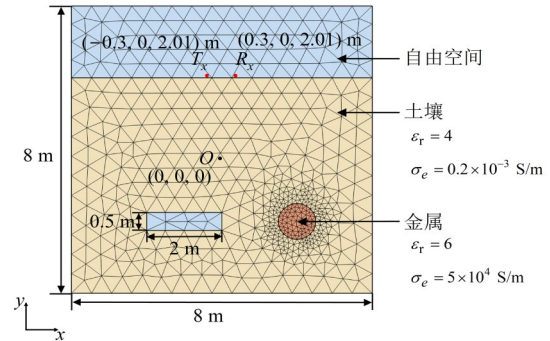


图4 探地雷达的计算模型

在仿真过程中,采用显式RK44格式求解时,即使时间步长为CN-RK22格式的 $1/1\ 000$,仿真结果在100个时间步长内就迅速发散.而CN-RK方法的稳定性不受电导率或导磁率的影响.分别采用CN-RK22、CN-RK33和CN-RK44格式对该算例进行模拟,选取各自较大的时间步长,得到接收天线处 E_z 的时域波形如图5所示.将COMSOL在细网格下的仿真结果作为参考解,CN-RK方法的计算结果与参考解吻合较好.图6给出了CN-RK方法相对误差的时间曲线,三种不同CN-RK格式的相对误差都较为接近,且均低于3%.相对误差定义为

$$E_z^{\text{error}} = \frac{|E_z - E_z^{\text{ref}}|}{\max|E_z^{\text{ref}}|} \times 100\% \quad (30)$$

式中: E_z^{ref} 表示 E_z 的参考解.

进一步,用可决系数描述CN-RK方法的计算结果与参考结果之间的拟合程度,可表示为

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (E_z - \bar{E}_z^{\text{ref}})^2}{\sum (E_z^{\text{ref}} - \bar{E}_z^{\text{ref}})^2} \quad (31)$$

式中: \bar{E}_z^{ref} 表示 E_z^{ref} 的平均值.一般情况下,可决系数满足 $0 \leq R^2 \leq 1$. R^2 越接近于1,表示计算结果越接近参考解,即误差越小.由表3可知,三种不同的CN-RK方法的可决系数都十分接近于1,从而验证了CN-RK方法在求解有损问题中的准确性和有效性.且不难看出,在各自较大的时间步长下仿真时,相比于CN-RK22格式,CN-

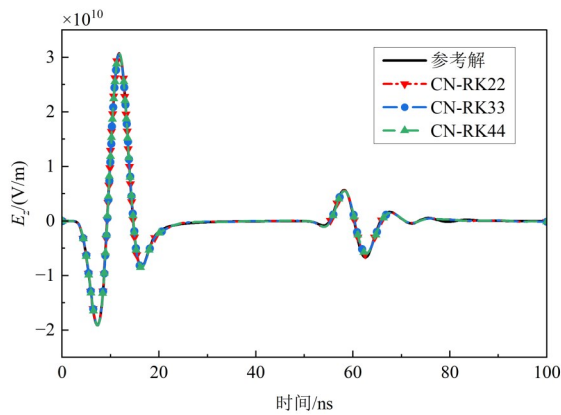


图5 接收天线 R_1 处 E_z 的时域波形

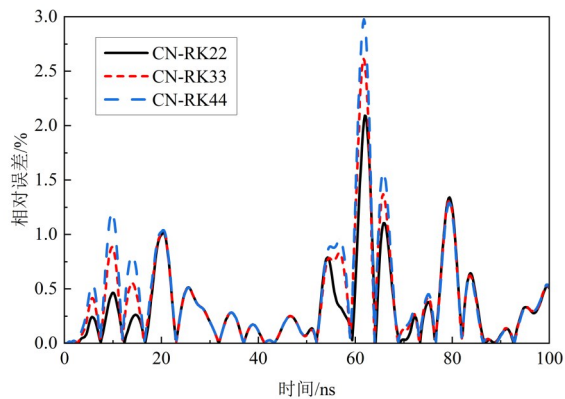
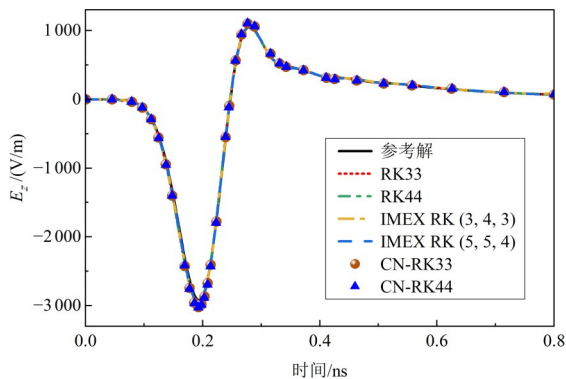


图6 CN-RK方法相对误差的时间曲线

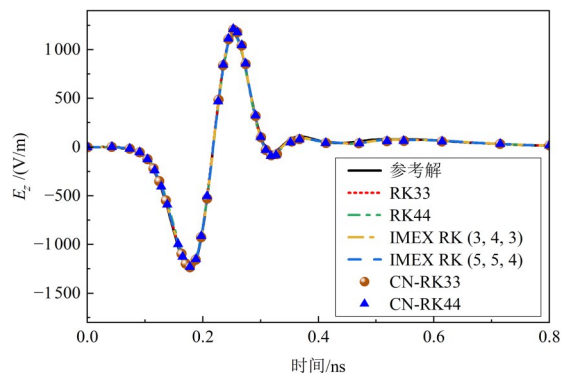
RK33格式和CN-RK44格式所能选取的时间步长更大,但由于中间阶段数更多,因此在该算例下的计算时间只比CN-RK22格式略少.

表3 CN-RK方法的计算性能比较

| 方法 | 时间步长/ps | 时间步数 | CPU时间/s | R^2 |
|---------|---------|-------|---------|---------|
| CN-RK22 | 25.39 | 3 938 | 87.23 | 0.999 3 |
| CN-RK33 | 38.09 | 2 625 | 81.91 | 0.999 1 |
| CN-RK44 | 50.79 | 1 969 | 80.86 | 0.998 8 |



(a) 介质基板外观察点(-12,-12,1) mm



(b) 介质基板内观察点(-12,0,-3) mm

图8 观察点处 E_z 的时域波形

4.3 考虑基板和涂层损耗的吸波器

为了进一步验证CN-RK方法在计算效率和内存方面的优势,对图7所示的吸波器模型进行仿真. 介质基板材料参数为 $\epsilon_r=2.2$ 、 $\mu_r=1$ 和 $\sigma_e=0.4$ S/m,金属涂层由 2×2 个耶路撒冷十字组成,其电导率为 2.4×10^3 S/m. 介质基板和金属涂层的厚度均为4 mm. 采用一阶吸收边界条件截断计算域,总的离散四面体个数为8 000个,基函数阶数 $N=2$,设置总仿真时间为0.8 ns. 在点(0,0,4) mm处加入一个垂直电偶极子源,电偶极矩为

$$p = 10^{-12} \exp \left[- \left(\frac{t-3t_0}{t_0} \right)^2 \right] \quad (32)$$

其中, $t_0 = 1 / [\pi(f_h - f_c)]$, $f_h = 10$ GHz, $f_c = 15$ GHz.

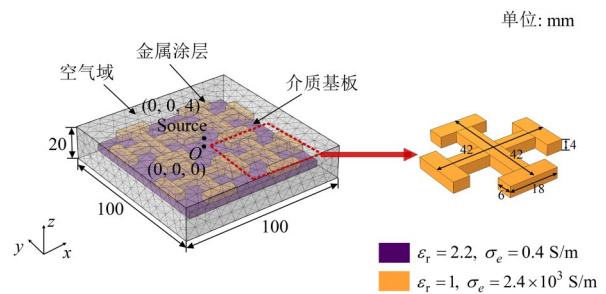


图7 吸波器的计算模型

分别采用CN-RK方法、显式RK方法和IMEX RK方法^[14]对该算例进行电磁计算,在各自保持稳定的最大时间步长下仿真,并将其计算性能进行比较. 其中IMEX RK方法选取三阶IMEX RK (3, 4, 3)和四阶IMEX RK (5, 5, 4)格式. 根据式(13)可得显式RK33和RK44格式满足稳定的时间步长上限分别为0.009 ps和0.010 ps. CN-RK方法和IMEX RK方法的时间步长上限约为显式RK方法的50倍左右. 如图8所示,通过仿真得到了介质基板内外的观察点处 E_z 的时域波形,由图8可知,仿真结果与采用COMSOL计算的参考解吻合较好.

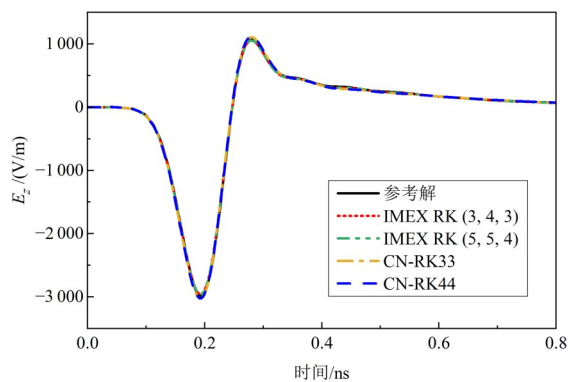
表 4 给出了不同方法的计算性能对比. 由表 4 可知, CN-RK33 方法的计算时间为 5.22 min, 仅为 RK33 格式的 1.87%. 且与三阶 IMEX RK(3, 4, 3) 方法相比, CN-RK33 方法的计算效率提高了 25.64%. CN-RK44 方法的计算时间为 5.96 min, 计算效率相比 RK44 和 IMEX RK(5, 5, 4) 方法分别提高了 98.09% 和 28.45%.

若进一步增大金属涂层的电导率至 5.8×10^7 S/m, 以显式 RK33 格式为例, 根据式 (13) 可得满足稳定的最大时间步长减小至 $\Delta t_{\max} = 3.83 \times 10^{-19}$ s, 时间步数约为 2.09×10^9 步, 每执行一步的计算时间约为 0.18 s, 总的计算时间约为 12 年, 计算时间难以承受. 而 CN-RK 方法的时间步长不受有耗媒质的影响, 其中 CN-RK33 的时间步长约为 RK33 的 123 万倍, 可在接受的时间范围内得到计算结果, 图 9 展示了介质基板内外的观察点处 E_z 的时域波形, 仿真结果与参考解吻合较好. 且由表 4 可知, 与 IMEX RK 方法相比, CN-RK 方法的计算效率提高了 30% 左右. 此外, CN-RK 方法的内存消耗与显

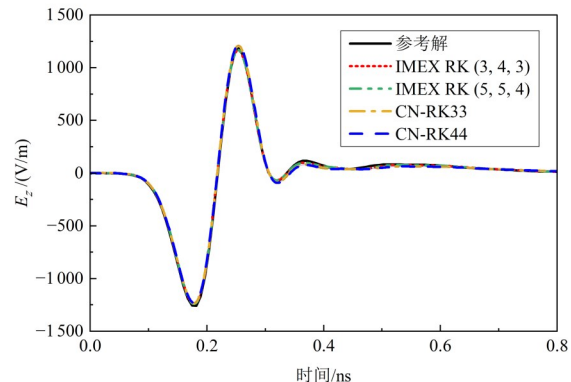
表 4 不同方法的计算性能对比

| 电导率/ (S/m) | 方法 | 时间步 长/ps | CPU 时间/ min | 内存/ MB |
|-------------------|-------------------|-------------|----------------|-----------|
| 2.4×10^3 | RK33 | 0.009 0 | 279.05 | 65.04 |
| | IMEX RK (3, 4, 3) | 0.458 6 | 7.02 | 73.60 |
| | CN-RK33 | 0.476 3 | 5.22 | 65.68 |
| | RK44 | 0.010 0 | 311.91 | 71.68 |
| | IMEX RK (5, 5, 4) | 0.491 1 | 8.33 | 90.08 |
| | CN-RK44 | 0.532 5 | 5.96 | 72.32 |
| 5.8×10^7 | IMEX RK (3, 4, 3) | 0.452 7 | 6.96 | 73.60 |
| | CN-RK33 | 0.470 4 | 5.52 | 65.68 |
| | IMEX RK (5, 5, 4) | 0.482 2 | 9.04 | 90.08 |
| | CN-RK44 | 0.532 5 | 5.85 | 72.32 |

式 RK 方法几乎一样, 隐式 CN 格式的引入几乎不会带来额外的计算负担, 其内存较 IMEX RK 方法可节省 10%~20%. 因此采用 CN-RK 方法可以在保证准确性的前提下提高计算效率, 降低内存消耗.



(a) 介质基板外观察点(-12,-12.1) mm



(b) 介质基板内观察点(-12,0,-3) mm

图 9 观察点处 E_z 的时域波形

5 结语

本文理论推导了有耗媒质中显式 RK-DGTD 方法的稳定性条件, 揭示了电导率或导磁率对稳定性的影响, 得到时间步长上限的估计值, 并对其准确性进行了数值验证. 此外, 本文针对有耗媒质提出了一种稳定的 CN-RK 格式的 DGTD 方法, 理论分析了该方法的稳定性. 与显式 RK 方法相比, 该方法可以完全移除媒质损耗引起的数值不稳定, 显著提高计算效率. 最后通过数值算例验证了该方法的准确性与有效性, 在保证计算精度的前提下, 其计算时间较显式 RK 方法可以节省 90% 以上, 且相较于 IMEX RK 方法可以降低约 30% 的时间成本和 10%~20% 的内存消耗.

本文方法适用于包含导电结构的典型工程场景, 如电磁兼容分析、雷达成像以及天线设计等. 其高效稳

定的计算特性可满足复杂电磁环境下的实时仿真需求, 为现代电磁工程中的高精度时域建模提供可靠的技术支撑, 具有重要的工程应用价值. 此外, 基于线性定常系统建立的 CN-RK 方法, 具有显式推进的优势, 能够在每个时间步实时更新与电磁场变化相关的材料参数, 有潜力推广到非线性媒质和时变损耗问题的分析研究中.

参考文献

- [1] 杨谦, 魏兵, 李林茜, 等. 一种强鲁棒性的时域非连续伽略金可穿透薄层算法[J]. 物理学报, 2023, 72(8): 17-26.
YANG Q, WEI B, LI L Q, et al. A robust discontinuous Galerkin time domain algorithm for penetrable thin layers[J]. Acta Physica Sinica, 2023, 72(8): 17-26. (in Chinese)

- [2] JIA Z L, ZHANG H H, DING D Z, et al. Time-domain shielding effectiveness analysis based on DGTD method accelerated by local time-stepping and parallel techniques[J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2023, 65(3): 900-911.
- [3] ZHANG X, LI P, LI X C, et al. A hybridizable discontinuous Galerkin time-domain method with robin transmission condition for transient thermal analysis of 3-D integrated circuits[J]. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 2022, 12(9): 1474-1483.
- [4] LI X, XU L, YANG Z H, et al. A new explicit-implicit hybridizable discontinuous Galerkin time-domain method for electromagnetics[J]. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 2022, 32(11): 1263-1266.
- [5] LIU Q Q, ZHAO W S, WANG H, et al. 3-D domain decomposition method with nonconformal meshes for thermoelastic modeling[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2024, 21: 7502105.
- [6] LEE J F, LEE R, CANGELLARIS A. Time-domain finite-element methods[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1997, 45(3): 430-442.
- [7] 文腾, 崔翔, 李学宝, 等. 考虑介质电弛豫影响时瞬态电场计算的时域有限元法[J]. *电工技术学报*, 2022, 37(7): 1735-1745.
- WEN T, CUI X, LI X B, et al. Time-domain finite element method for calculation of transient electric field in combined insulating structures considering the influence of dielectric relaxation[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2022, 37(7): 1735-1745. (in Chinese)
- [8] 张黎, 童美松. 基于双区域增强体-面积分方程的有损互连结构的低频分析[J]. *电子学报*, 2025, 53(6): 1874-1884.
- ZHANG L, TONG M S. Low-frequency analysis of lossy interconnect structures based on two-region augmented volume-surface integral equations[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2025, 53(6): 1874-1884. (in Chinese)
- [9] 张金颢, 周恒, 张守龙, 等. 基于仿真及神经网络的大型电磁脉冲模拟器近区场计算[J]. *电子学报*, 2023, 51(3): 712-719.
- ZHANG J H, ZHOU H, ZHANG S L, et al. Calculation of near-field of large-scale electromagnetic pulse simulator based on simulation and neural network[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(3): 712-719. (in Chinese)
- [10] ÖZAKIN M B, CHEN L, AHMED S, et al. Stability analysis of discontinuous Galerkin time-domain method for conductive media[C]//2021 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium (ACES). Piscataway: IEEE, 2021: 1-3.
- [11] CATELLA A, DOLEAN V, LANTERI S. An unconditionally stable discontinuous Galerkin method for solving the 2-D time-domain Maxwell equations on unstructured triangular meshes[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2008, 44(6): 1250-1253.
- [12] WANG J W, CHEN F, MA X K, et al. A Krylov-subspace-based exponential time integration scheme for discontinuous Galerkin time-domain methods[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2019, 55(6): 7204605.
- [13] CHEN J F, TOBON L E, CHAI M, et al. Efficient implicit-explicit time stepping scheme with domain decomposition for multiscale modeling of layered structures[J]. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 2011, 1(9): 1438-1446.
- [14] XIANG R, MA X K, MA L, et al. A stable discontinuous Galerkin time-domain method with implicit-explicit time-marching for lossy media[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2024, 60(12): 7001804.
- [15] HESTHAVEN J S, WARBURTON T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*[M]. New York: Springer New York, 2008.
- [16] 葛德彪, 魏兵. 电磁波时域不连续伽略金方法[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- GE D B, WEI B. *Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for Electromagnetic Waves*[M]. Beijing: Science Press, 2019. (in Chinese)
- [17] 张志勇, 程曦. 色散有损介质土壤对电磁回波影响的不确定性分析研究[J]. *电子学报*, 2021, 49(3): 614-618.
- ZHANG Z Y, CHENG X. Uncertainty analysis of the influence of dispersive and lossy soil on electromagnetic wave propagation[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(3): 614-618. (in Chinese)
- [18] XIE G D, FENG N X, FANG M, et al. A stability extensible symplectic FDTD(4, 4) method and its application in subgrid technique for arbitrary grid ratios[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2023, 71(11): 9124-9129.

作者简介



向 汝 女, 1999 年 3 月出生于湖北省利川市. 现为西安交通大学电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为时域间断伽辽金方法及其在多尺度电磁问题中的应用等.

E-mail: ruxiang@stu.xjtu.edu.cn



迟明璐 女, 1998 年 1 月出生于山东省青岛市. 现为西安交通大学电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为电磁场数值计算.

E-mail: 3120104253@stu.xjtu.edu.cn



马西奎 男, 1958 年 5 月出生于陕西省渭南市. 现为西安交通大学电气工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向为电气工程中的多物理场耦合理论及其数值分析软件技术、通信和电子系统中的电磁场与电磁波、电力电子系统非线性动力学理论等.

E-mail: maxikui@mail.xjtu.edu.cn



王嘉玮 男, 1990 年 12 月出生于陕西省西安市. 现为西安交通大学电气工程学院副教授. 主要研究方向为电气设备的电磁兼容分析与优化设计、电磁场和多尺度多物理场建模仿真技术以及面向物理场分析的计算机辅助工程 (CAE) 软件开发等.

E-mail: jwwang@xjtu.edu.cn



马 亮 男, 1997 年 10 月出生于安徽省无为市. 现为西安交通大学电气工程学院博士研究生. 主要研究方向为电磁场数值计算.

E-mail: 3120104254@stu.xjtu.edu.cn